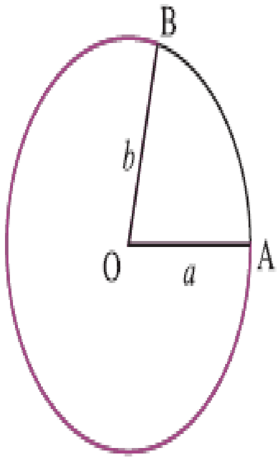
Тригонометријска кружница и свођење на I квадрант

Увод



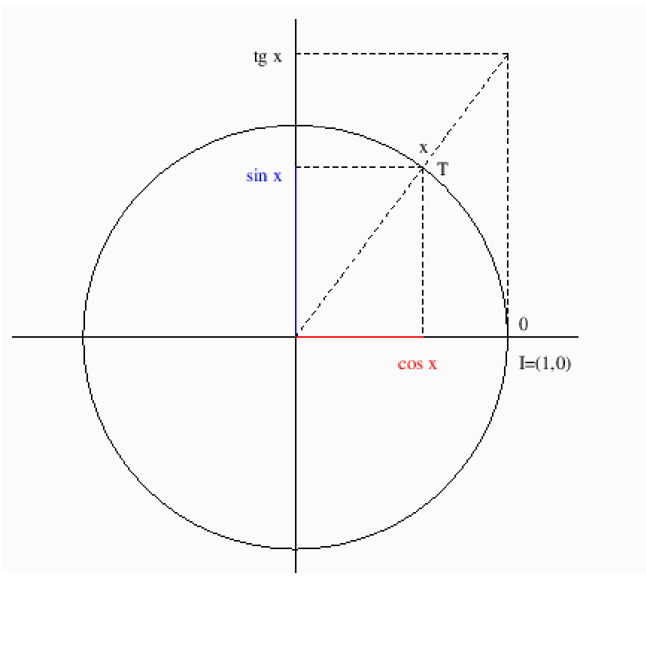
Радијан је уз степен јединица за мерење углова. Радијан је дужина лука AB јединичне кружнице који се види под датим углом AOB из центра круга. Пун угао износи 2π радијана.

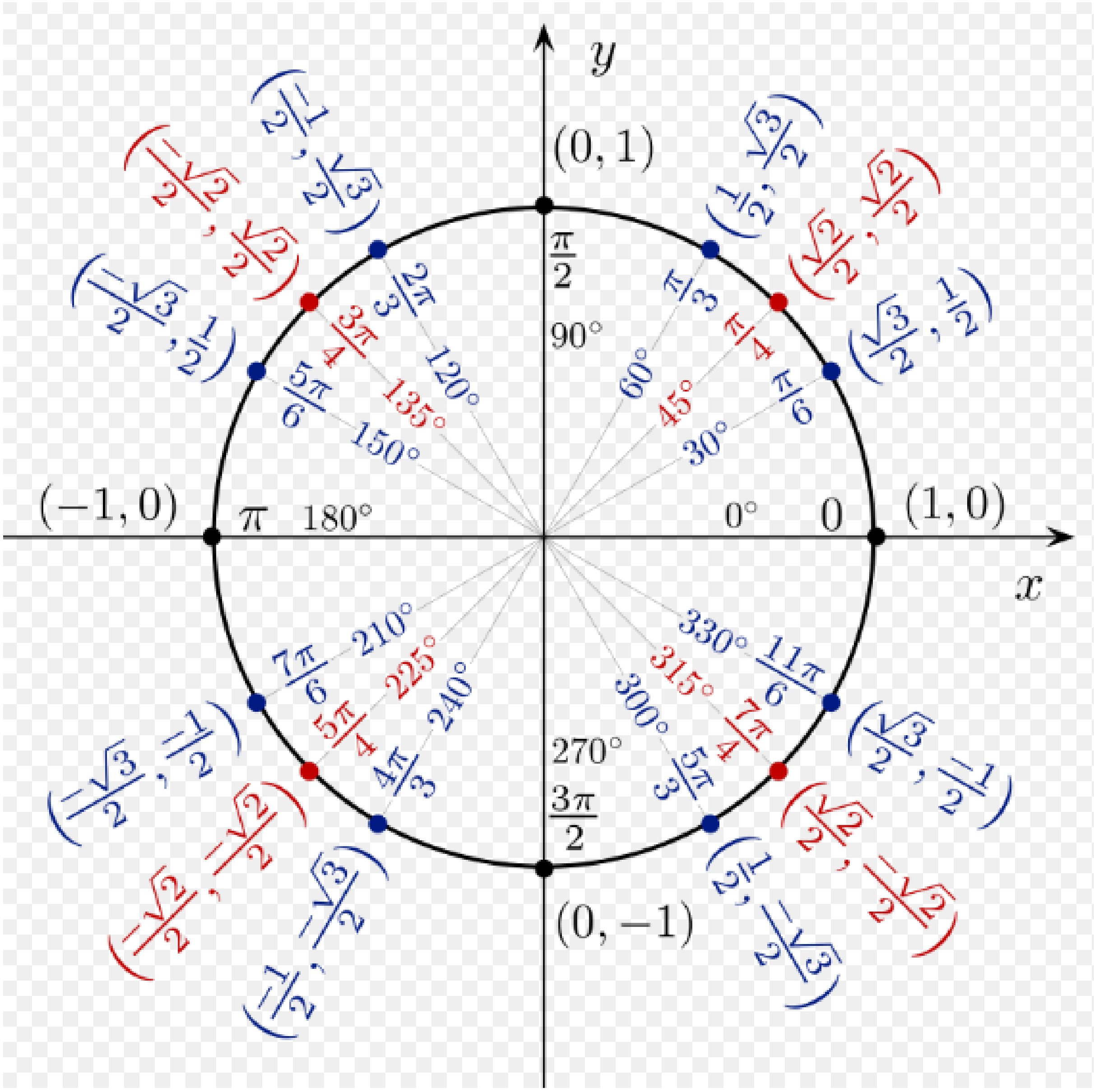
$$180^\circ = \pi \quad rad \qquad\qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180} rad \approx 0{,}017$$

$$1 rad = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45'' \; mj. \quad \boxed{180^\circ : \alpha^0 = \pi : \varphi \, rad}$$

Тригонометријска кружница

- Тригонометријске функције угла α се могу дефинисати помоћу **тригонометријске кружнице**.
- Тригонометријска кружница је кружница полупречника 1 са центром у координатном почетку.
- на x- оси читамо косинус угла, а на y- оси синус угла

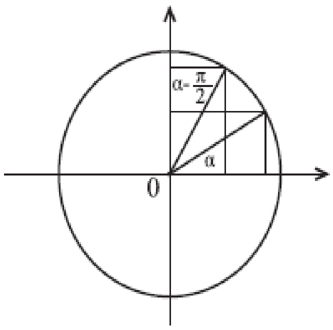




Ако је $\alpha = \pi \pm 2k\pi$ или $\alpha = 2\pi \pm 2k\pi$ тригонометријска функција се не мења, а знак тригонометријске функције се одређује помоћу тригонометријског круга.

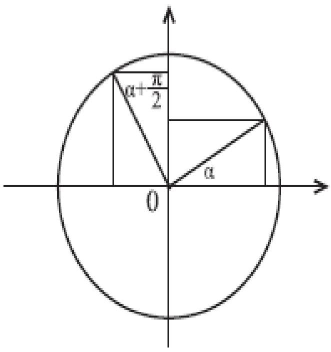
Ако је $\alpha = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$ или $\alpha = \frac{3\pi}{2} \pm 2k\pi$ тригонометријска функција се мења у своју кофункцију, а знак тригонометријске функције се одређује помоћу тригонометријског круга.

Свођење на I квадрант



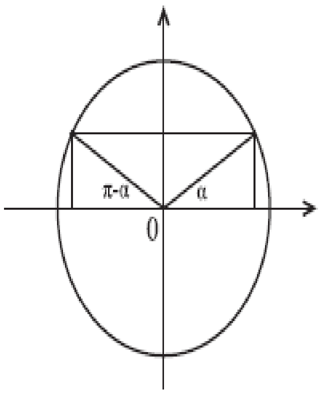
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha \qquad ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=tg\alpha$$



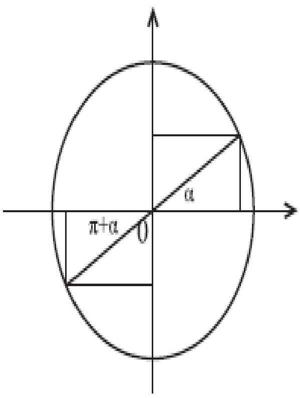
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\alpha \qquad ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha$$



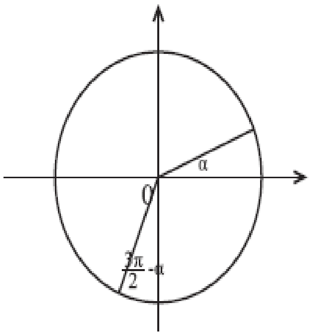
$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$

$$tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha \qquad ctg(\pi-\alpha)=-ctg\alpha$$

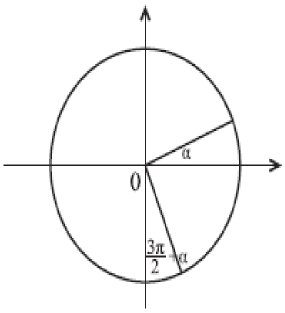


$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$

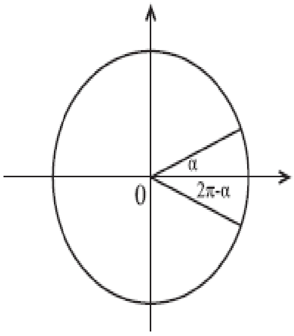
$$tg(\pi+\alpha)=tg\alpha \qquad ctg(\pi+\alpha)=ctg\alpha$$



$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$$
$$tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha \qquad ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=tg\alpha$$



$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$$
$$tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\alpha \qquad ctg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha$$



$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$$
$$tg(2\pi-\alpha)=-tg\alpha \qquad ctg(2\pi-\alpha)=-ctg\alpha$$

Пример 1.

$$\textbf{a)}\ \sin 115^o=\sin(90^o+25^o)=\cos 25^o$$

а може и

$$\sin 115^o=\sin(180^o-65^o)=\sin 65^o$$

$$\textbf{b)}\ \cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\textbf{v)}\ tg141^o=tg\left(180^o-39^o\right)=-tg39^o$$
$$\textbf{g)}\ ctg101^o=ctg\left(90^o+11^o\right)=-tg11^o$$

Пример 2.

$$\textbf{a)}\ \sin\frac{4\pi}{3}=\sin\left(\frac{3\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\textbf{b)}\ \cos 207^o=\cos(180^o+27^o)=-\cos 27^o$$

$$\textbf{v)}\ tg263^o=tg(270^o-7^o)=ctg7^o$$

$$\textbf{g)}\ ctg\frac{7\pi}{6}=ctg\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=ctg\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

Пример 3.

$$\textbf{a)}\ \sin 307^o=\sin(270^o+37^o)=-\cos 37^o$$

$$\textbf{b)}\ \cos(-30^o)=\cos 30^o=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\textbf{v)}\ tg\frac{11\pi}{6}=tg\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-tg\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\textbf{g)}\ ctg\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-ctg\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Пример 4.

$$\textbf{a)}\ \sin 1170^o=$$

Како је 1170^0 веће од 360

$$1170^o-360^o=810^o$$

$$810-360^o=450^o$$

$$450^o-360=90^o$$

Па је

$$\sin 1170^o=\sin 90^o=1$$

Или

$$\sin 1170^o=\sin(90^o+3\cdot 2\pi)=\sin 90^o$$

b) $\cos 780^\circ =$

$$780^\circ - 360^\circ = 420^\circ$$
$$420^\circ - 360^\circ = 60^\circ$$

$\cos 780^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ tj. $\cos 780^\circ = \cos(60^\circ + 360^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

1) Uprostiti izraz: $\dfrac{\sin 750^\circ \cdot \cos 390^\circ \cdot tg1140^\circ}{ctg405^\circ \cdot \sin 1860^\circ \cdot \cos 780^\circ}$

$$\sin 750^\circ = \sin(30^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$
$$\cos 390^\circ = \cos(30^\circ + 360^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$tg1140^\circ = tg(60^\circ + 6 \cdot 180^\circ) = tg60^\circ = \sqrt{3}$$

$$ctg405^\circ = ctg(45^\circ + 2 \cdot 180^\circ) = ctg45^\circ = 1$$
$$\sin 1860^\circ = \sin(60^\circ + 5 \cdot 360^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 780^\circ = \cos(60^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

Сада се вратимо у почетни задатак

$$\frac{\sin 750^\circ \cdot \cos 390^\circ \cdot tg1140^\circ}{ctg405^\circ \cdot \sin 1860^\circ \cdot \cos 780^\circ} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \sqrt{3}}{1 \cdot \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \cancel{\frac{1}{2}}} = \sqrt{3}$$

2. Доказати идентитет:

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(-\alpha)}{\cos(2\pi+\alpha)tg(\pi-\alpha)}=-\sin\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$$
$$ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-tg\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha$$
$$tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha$$

Па je

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(-\alpha)}{\cos(2\pi+\alpha)tg(\pi-\alpha)}=\frac{(-\sin\alpha)\cancel{(-tg\alpha)}\ \cancel{(\cos\alpha)}}{\cancel{(\cos\alpha)}\ \cancel{(-tg\alpha)}}=-\sin\alpha$$

Задаци за вежбу

збирка 1414-1441